943. 不完全体ノ上ノ代數集合体ノ所謂 zugeordnete Form 及ビ函數体, tangent space ニツイテノ一注意

中山　正（阪大）

代數幾何ノ基礎ハ Van der Waerden ニヨッテ完全ニ代數化サレマシタガ、ソレラノ論文 ZAG 及ビ一昨年ダカ出タ彼ノ本其ノ他ヲ見マシテモ標數ガ p ノ時、特ニ不完全（unvollkommen）体ノ場合ハヨク吟味サレテ居ラズ、ソノ点何トナク氣ニナル点ガアリマシタノデ、ソレヲ一寸吟味シテ見マシタ。ソンナ細イ点ノ吟味ナド興味ヲ持タレル方モ少イカト思ヒマスガ、實ハ昨年一寸代數幾何ニツイテ連續シヤベル機會ヲ持チマシタ折、ソノ点ヤハリ氣ニシナガラ立入レズ、モシ吟味ガ旨ク行ッタラ「紙數」ニデモ書クト言ッテシマッタノデ、ソノ口約ヲハタシタイト思ヒマス。

Mヲ体Kノ上ノn次元射影空間ノ中ノd次元ノ既約代數集合体トシ, $\xi=(\xi_0, \xi_1, \cdots\cdots, \xi_n)$ ヲソノ（normalized）一般点トシ, マタ $F(\overset{0}{u}, \overset{1}{u}, \cdots\cdots, \overset{d}{u})$ ヲソノ所謂 zugeordnete Form トスル（定義ハ下ヲ参照）。

$F(u)$ ヲ $\overset{0}{u}$ ノミノ型式ト見テ, コレヲ一次式ニ分解スレバ, 標數ガ0ノ場合ニハソレラノ一次式ハスベテ異ッテ問題ハナイノデスガ、標數ガpノ時ニハ一般ニソウデ

ナク、異ナル一次式ノ積ノ何カ p^e 乗ニナル．他方 M ノ函數体 $K(\xi_0, \xi_1, \cdots\cdots, \xi_n)$ ハ K ニ対シテ d 次元デスガ、適當ニ独立ナ $\xi_{i_1}, \cdots\cdots, \xi_{i_d}$ ヲトッテ

(1) $K(\xi_0, \xi_1, \cdots\cdots, \xi_n)/K(\xi_{i_1}, \cdots\cdots, \xi_{i_d})$

ナル代數拡大ヲ考ヘテモ必ズシモコレガ *separable* ニ出来ナイ　同ジコトヲ言葉ヲ変ヘレバ

(2) $K(\xi_0, \cdots\cdots, \xi_n)$ ノ中ノ K ニ対シテ代數的ナ最大ノ部分体ハ K ニ対シテ *separable* トハカギラヌ。更ニマタ M ノ一般点デ必ズシモ *tangent space* ガ存在シナイ。（コレハ M ノ単純点デトイフテモヨイ）

コレラノ事ヲ吟味シタイノデスガ，結論ハ上記 p^e ナル指數ハ丁度 (2) ナル体ノ K ニ對スル *inseparability exp.*（スベテノ元ヲソレダケ乗ズレバ K ニ對シテ *separable* ニナルヤウナ最小ノ指數）ニ等シイ。少シ言ヒカヘレバ，$p^e=1$ ニナルノハ (1) ナル拡大ガ適當ナ $i_1, i_2, \cdots\cdots, i_d$ ヲトレバ *separable* ニ出来ルトキ、且ツソノ時デアル．而シテコレハマタ一般点ニ *tangent space* ガアル時、且ツソノ時ニカギル。

大体想像出来ルコトデスガ、証明ショウトスルト一寸面倒ナノデス、ナホ p^e ガ (2) ノ *insep. exp.* デアッテ *insep. degree* デナイコト，従ッテ特ニ 0 次元（$d=0$）ノ場合ヲ考ヘテ見テモ F ノ次數ハ必ズシモ函數体ノ次數ニヒトシクナイコトハ，或ヒハ普通ノ如ク F ノ次數ヲモッテ直チニ M ノ次數ト定義スルコトニ或ル疑点ヲ

生ゼシメルノデハナイカト思フ。（シカシ以下デハ言葉ニハコダハラナイ事ニシヨウ）。

マタ上記ニヨリFノ exp. p^e ガ *birational invariant* デアル事モワカッタワケデアル。

ナホ、興味ノアルノハ不完全（*unvollkommen*）ナ基礎体ノ場合ノミデス。シカシ、代数幾何デハ勿論基礎体カラ超越拡大ヲ行ッテソレヲ基礎体ニスルコトガシバシバアリ、従ッテ最初ノ基礎体ガ完全デモ、不完全基礎体ヲ考ヘル事ガ度々アルワケデス。

念ノタメ、基本的ノ定義ヲ一二： Mノ点 x トソレヲトホル $d+1$ 個ノ超平面 $\overset{0}{u}, \overset{1}{u}, \cdots\cdots, \overset{d}{u}$ トヲ対応サセル代数対応ヲ考ヘル。コレノ像集合体，スナハチカユル $d+1$ 個ノ超平面ノナス集合体ハ $d+1$ 重射影空間内ノ既約超曲面ヲナシ、従ッテ一ツノ有次関係

(3) $\quad F(\overset{0}{u}, \overset{1}{u}, \cdots\cdots, \overset{d}{u}) = 0$

デ定義サレル。

コノ型式 $F(\overset{0}{u}, \overset{1}{u}, \cdots\cdots, \overset{d}{u})$ ヲMノ"*zugeordnete Form*" トヨブ。ソレハ各 $\overset{i}{u}$ ニツイテ同ジ次数 g ヲモチ、ソレヲMノ次数トヨブ（上記注意参照）。而シテ $\overset{0}{u}$ ダケノ型式ト見テ $K(\overset{1}{u}, \overset{2}{u}, \cdots\cdots, \overset{d}{u})$ ノアル拡大体ニオイテ

(4) $$F(\overset{0}{u}, \overset{1}{u}, \cdots\cdots, \overset{d}{u}) = \rho \prod_{i=1}^{h} (\overset{i}{p}_0 \overset{0}{u}_0 + \overset{i}{p}_1 \overset{0}{u}_1 + \cdots\cdots + \overset{i}{p}_n \overset{0}{u}_n)^q,$$

$$\rho \neq 0, \qquad hq = g \qquad (q = p^e)$$

ト分解サレル．h 個ノ $\overset{i}{p}$ ハ M ト d 個ノ独立ナ一般超平面トノ交ハリノ相異ルモノ全体デアル。（g ハ体 $K(\overset{1}{u}, \cdots\cdots, \overset{d}{u}, \overset{i}{p})$, $K(\overset{1}{u}, \cdots\cdots, \overset{d}{u})$ ニ対スル inseparability exp. ナル事ハ明カデアル。）

次ニ $H: H(x)=0$ ガアル超曲面ナルトキ，

$$\sum_i X_i \, \partial_i H(y) = 0$$

ハ y ニオケル H ノ polar デアル．H ヲスベテノ超曲面ノ y ニ於ケル polars ノ交ハリナル線型空間ガ丁度 d 次元ナルトキ，ソレヲ H ノ y ニオケル tangent トヨブ。

$d = n - m$ 個ノ独立ナ一般超平面ノ交ハリヲ一般ナル m 次元線型空間トヨブ。ソノ Plücker 座標 $(\pi_{i_1 i_2}, \cdots\cdots, {}_{i_d})$ ハヨク知ラレタ Plücker 座標ノミタス関係式デ定義サレタ代數集合体ノ一般点ヲナス、逆ニコノ代数集合体ノ一般点ハアル一般 m 次元線型空間ノ Plücker 座標デアル。

コノ明カナ注意ヲ直接及ビ双對的ニツカヘバ <u>S_m ト S_t トガ独立ナ m 次元，t 次元一般線型空間デアリ且ツ $m+t+1 \leqq n$ ナラバ S_m, S_t デ張ラレタ空間ハ（$m+t+1$ 次元）一般線型空間デアル</u>．（コレモ殆ンド自明ノコトデハアルが、タダ「一般ナ」トイフ様ナ言葉デゴマカサズ、ヤハリ証明シナケレバナラナイ事柄デアラウ）

モウ一ツ一般超平面ニツイテノ注意ハ、ソレが独立ナ一般超平面 $\overset{1}{u}, \cdots\cdots, \overset{d}{u}$ ノ交ハリナラバ，<u>体 $K(\overset{1}{u}, \cdots\cdots, \overset{d}{u})$ ハソノ Plücker 座標ノ体 $K(\pi_{i_1}, \cdots\cdots {}_{i_d})$</u>

ノ純超越拡大ナルコトデアル。ソレハタトヘバ

$$\overset{1}{u}_0, \cdots\cdots, \overset{1}{u}_{d-1}, \cdots\cdots, \overset{d-1}{u}_0, \cdots\cdots, \overset{d-1}{u}_{d-1},$$

$$\overset{d}{u}_0, \cdots\cdots, \overset{d}{u}_{d-2}$$

ナル d^2-1 個ノ元ガ $K(\pi)$ ニ對シテ独立デ、ソレニヨッテ他ノ u ガスベテ表ハサレル事ガ Plücker 座標ノ定義ノ式カラ容易ニ証明サレルノデアル。

コノ事カラ (4) ノ h 個ノ点 $\overset{1}{p}, \cdots\cdots, \overset{h}{p}$ ハ $K(\pi)$ ニ對シテ代數的（互ニ共軛）ダガ、ソレガ $K(\pi)$ ニ對シテ separable ナルタメニハ $K(\overset{1}{u}, \cdots\cdots, \overset{d}{u})$ ニ対シテソウデアルコトガ（必要且ツ）充分デアル。

サテ、前述ノ如ク基礎体 K ガ不完全ノ時ノミガ興味ノ中心デアル。何トナラバ容易ニワカル如ク（例ヘバ ZAG. XIV, §1 ノ Hilfssatz）K ガ完全ナルトキニハ常ニ適當ニ $i_1, i_2, \cdots\cdots, i_d$ ヲエラベバ (1) ガ separable ニナル様ニ出来ル。

コレダケヲ準備トシテ

補題 1. M ガソノ一般点 ξ デ tangent space ヲモツタメニハ (1) ガ適當ナ $i_1, i_2, \cdots\cdots, i_d$ ニヨッテ separable ニナルコトガ必要且ツ充分デアル。

充分ノコトハ既知（例ヘバ ZAG. XIV, §1, Satz 1）。必要ナルコトヲイフタメニハ、K ノ上ノ最小ノ完全体 K^* ヲ考ヘ、ソコマデモッテ行ッテ、ソコニ上ノ注意カラ $j_1, \cdots\cdots, j_d$ ヲトッテ $K^*(\xi_i)$ ガ $K^*(\xi_{j_1}, \cdots\cdots \xi_{j_d})$ ニ對

シテ sep. ナル如クシテ、シカシテ K^* ニオケル代数関係ヲ何乗カシテ（指数ハ p ノ巾）K ニモドッテ考ヘル、ソノ時ソノ p ノ巾ガスベテ 1 デナイナラ M ヲフクム超平面ノ ξ ニオケル polars ノ交リガ少クモ $d+1$ 次元ナルコトが容易ニワカル。

補題 2. <u>M ガソノ一般点デ tangent space T ヲ有ツナラバ、ソノ zugeordnete Form ハ u ノ異ル一次式ノ積ニナル（即チ $g=1$ デアル.</u> ソレニハ ξ ヲトホル d 個ノ最モ一般ナ超平面 $\overset{1}{u}, \cdots\cdots, \overset{d}{u}$ ヲ考ヘルト，コレハ<u>基礎体 K ニ関シテ</u>ハ全ク独立ナ d 個ノ超平面トナル．ヨッテソレトM ノ交リハ既約ナ 0 次元集合体、スナハチ互ニ共軛ナ点ノ集リニナリ、ソノ一ツが我々ノ ξ デアル．サテ T ト $\overset{1}{u}, \cdots\cdots, \overset{d}{u}$ トノ交リハ（0 次元ノ）ξ ノミデアル．ヨッテ ξ がソノ 0 次元集合体ノ ξ ニオケル tangent space ニナル、シカラバ前補題 1 ヲコノ 0 次元集合体ニ適用スレバ ξ が $K(\overset{1}{u}, \cdots\cdots, \overset{d}{u})$ ニ対シテ separable．ヨッテ $g=1$ デアル。

次ニ証明ノ中心ナル補題 3.

<u>M ノ zugeordnete Form ノ $g=1$ ナラバ M ノ一般点ニ tangent space が存在スル。</u>

先ヅ Case i) $d=n-1$，即チ M が超曲面ノ時．コノ場合ニハ F が直接ニ容易ニワカルカラ、ソレカラ直接証明サレル。

Case ii) $d<n-1$. コノ時ハ i) ノ場合ニ結局 re-

duce スルコトニナリ idea ハ大体 Van der Waerden ノ本ノ174頁ノ所ト大体同ジデアルが、separability ヲ吟味シツヽ進ムノデ、少シ複雑ニナリ、ソコニ出テ来ナイ色々ノ補助ノ超平面ナドモッテ来ナケレバナラナイ。トモカク $\overset{1}{u}, \ldots, \overset{d}{u}$ ヲ独立ナ一般超平面，ソノ交ハリヲ S_{n-d} トスル。S_{n-d} トMノ交点ヲ $p^{1}, \ldots, p^{g}$ トスル。仮定ニヨリ g がMノ次数デアリ，p^{i} ハ $K(u)$ ニ対シテ（従ッテ前ニ注意シタ如ク）マタ S_{n-d} ノ Plücker 坐標ノ体 $K(\pi)$ ニ対シテ separable デアル。

他ニ独立ナ二ツノ超平面 $\overset{1}{w}, \overset{2}{w}$ ヲ考ヘ、ソレト S_{n-d} ノ交リヲ S_{n-d-2} トオク。マタ更ニ他ニ独立ナ $n-1$ 個ノ超平面 $\overset{1}{v}, \ldots, \overset{n-1}{v}$ ヲ考ヘ、ソノ交リ（即チ一般直線）ヲ L トスル。

M ヲ S_{n-d-2} カラ project スルト $n-1$ 次元ノ cone ヲ得ル（コレハ体 $K(\overset{1}{u}, \ldots, \overset{d}{u}, \overset{1}{w}, \overset{2}{w})$ ニオケル集合体デアル）

L ト S_{n-d-2} デ張ラレタ線型空間 R_{n-d} ハ前ニ注意シタ如ク<u>一般</u> $n-d$ 次元線型空間デアル。ヨッテソレトMトハ g 個ノコトナル点 $\overset{1}{q}, \ldots, \overset{g}{q}$ デ交ハリ、ソレハ R_{n-d} ノ Plücker 座標ノ体 $K(\pi')$ ニ対シ separable デアル。各 $\overset{\nu}{q}$ ト S_{n-d-2} デ張ラレタ線型空間ト L トハアル一点 $\overset{\nu}{r}$ デ交ハル．g 個ノ点 $\overset{\nu}{r}$ ハ H ト L ノ交ハリニ他ナラヌ．L ハ $K(u, w)$ ニ対シテ一般直線デアルカラ、コレハ H ノ被約次数が g ナルコトヲ示ス。シカルニ $\overset{\nu}{q}$ が $K(\pi')$ $(\subset K(u, w, v))$ ニ対シテ separable ダカラ $\overset{\nu}{r}$ が $K(u, w, v)$ ニ対シテソウデアル。ヨッテ H

ノ次数自身gデアル.

ヨッテHニ大デニ済ンダCase i)ヲ適用シ且ツ衆知ノ所論ヲスレバ、ソノ simple point ニハ tangent space ガ存在スル。

然ルニp'ハHノ simple pts デアル. タトヘバp'ヲトリ、S_{n-d}ノ中デp'ヲ通ル一般ノ直線ヲlトスル. lトS_{n-d-2}ガS_{n-d}ヲ張ルカラ. lハHトg個ノ点デ交ル. シカルニ上ニ証明シタヤウニHノ次数ガgダカラ、コレラノ交ハリハ simple デアル. 特ニpガHノ simple pt デアル。

ヨッテHハp'ニオイテ tangent space T ヲ有ツ. lトHノ交リp'ガ simple ダカラlハTニフクマレヌ. 故ニTトS_{n-d}ノ交リハp'トS_{n-d-2}デハラレタ$n-d-1$次元線型空間デアル. 之ヲS_{n-d-1}デ表ハサウ。

サテ主張ニ反シテMヲフクム(Kニ於ケル)超曲面ノp'ニ於ケル polars ノ交リガd次元ヨリ高ケレバ, ソレトS_{n-d}ノ交リIノ次元rハ少クモ1デアル. $r \geq 1$ コノ交リノ空間Iハ体$K(u)$ニアリ. シカモTニフクマレル. 何トナラバTトMヲフクム超曲面Hノp'ニオケル tangent ダカラデアル. 然ルニTトS_{n-d}ノ交リハ上記ノp'トS_{n-d-2}デハラレタS_{n-d-1}デアル. ヨッテIハコノS_{n-d-1}ニフクマレル. シカルニS_{n-d-2}ハS_{n-d}ニオケル一般$n-d-2$次元線型空間デアル. (基礎体$K(u)$ニ関シテ). ヨッテS_{n-d-1}トIノ交リハ、タシカニrヨリヒクイ次元ヲモ

ツ．コレハ矛盾デアル．故ニMハp'デ tangent ヲモツ．ヨッテ補題ガ証明サレタ。

最後ニ，$K(\xi_0, \cdots\cdots, \xi_n)$ 中ノ最大ノ代數体（Kニ對シテ）ノ inseparability exp. q ハ $K^{q^{-1}}(\xi_0, \cdots\cdots, \xi_n)/K^{q^{-1}}(\xi_{i_1}, \cdots\cdots, \xi_{i_d})$ ガ適當ニ $i_1, \cdots\cdots, i_d$ ヲエラベバ separable ニナル最小ナル指數 q ニ等シイ．コトハ容易ニ証明サレル。

コレラヲ組合セテ我々ノ主張ガ得ラレル。